

Chapitre 13

Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes



13.1 Moments d'inertie

- 13.1.1 Barre mince
- 13.1.2 Cylindre creux
- 13.1.3 Cylindre plein

13.2 Solide indéformable avec un axe fixe

- 13.2.1 Théorème de Huygens-Steiner
- 13.2.2 Energie cinétique d'un solide indéformable
- 13.2.3 Théorème de l'énergie cinétique
- 13.2.4 Roue mal équilibrée

13.3 Gyroscopie et effets gyroscopiques

- 13.3.1 Effets gyroscopiques
- 13.3.2 Roue de vélo
- 13.3.3 Toupie

13.1 Moments d'inertie

13.1.1 Barre mince

13.1.2 Cylindre creux

13.1.3 Cylindre plein

- **Continuum de matière** : on considère que les points matériels P_α du solide sont suffisamment proches les uns des autres pour former un continuum.
- **Modèle du continuum** : limite du continu

somme discrète : $\sum \rightarrow \int$: intégrale

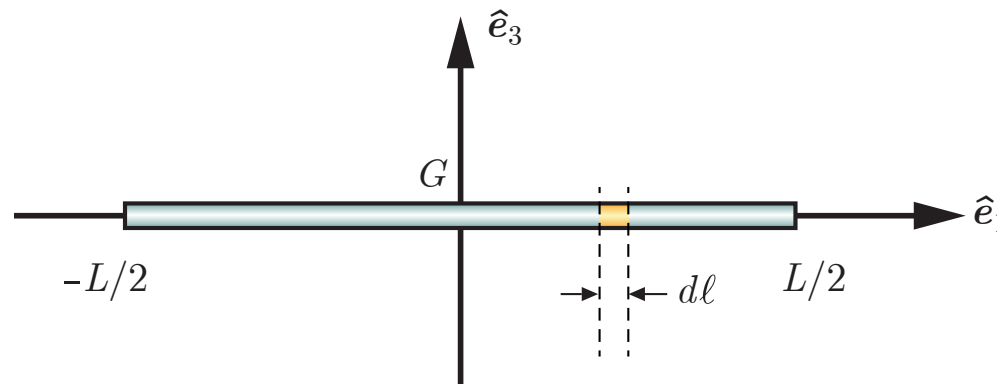
- **Moment d'inertie** : $I_{G,i}$ par rapport à l'axe principal d'inertie Ge_i

$$I_{G,i} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,i}^2 \longrightarrow I_{G,i} = \int_V dm r^2 \quad (13.1)$$

- m_{α} = masse du point matériel P_{α}
- dm = masse de l'élément de volume infinitésimal dV
- $r_{\alpha,i}$ = distance du point matériel P_{α} à l'axe Ge_i
- r = distance de l'élément de volume infinitésimal à l'axe Ge_i
- V = volume du solide indéformable

- **Barre mince** : orientée selon l'axe Ge_1 en rotation autour de l'axe Ge_3

- ① Masse : M
- ② Longueur : L
- ③ Epaisseur : e négligeable : $e \ll L$

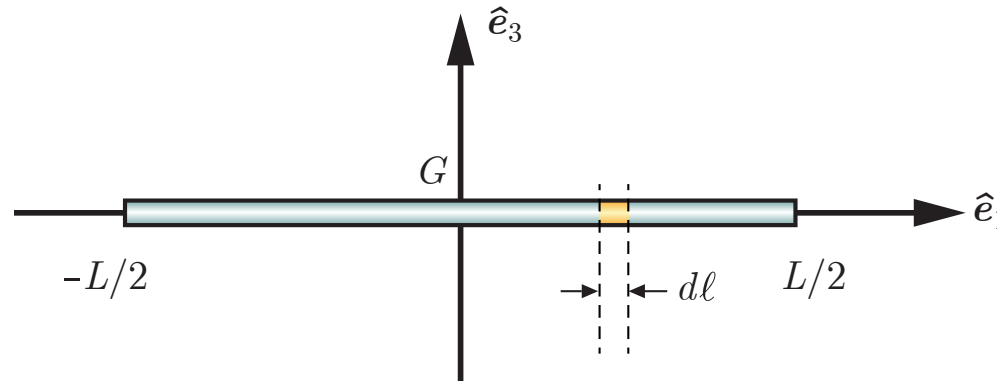


- **Moment d'inertie** : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3

$$I_{G,3} = \int_{-L/2}^{L/2} dm \ell^2 \quad (13.2)$$

- **Densité linéique** : barre homogène

$$\rho_\ell = \frac{dm}{d\ell} = \frac{M}{L} \quad (13.3)$$



- **Masse** : élément de longueur infinitésimale $d\ell$

$$dm = \rho_\ell d\ell = \frac{M}{L} d\ell \quad (13.4)$$

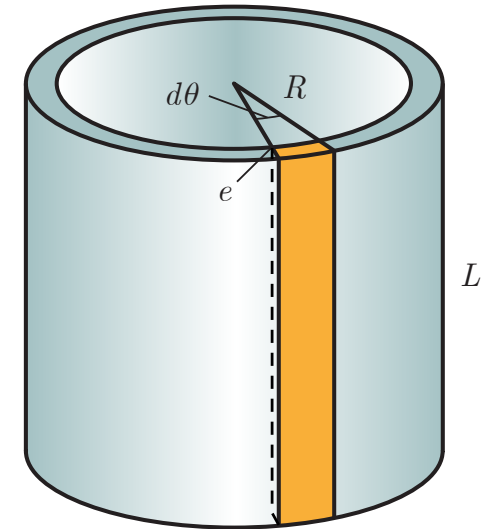
- **Moment d'inertie** : autour de l'axe principal d'inertie $G\hat{e}_3$

$$I_{G,3} = \int_{-L/2}^{L/2} dm \ell^2 = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \ell^2 d\ell = \frac{M}{L} \left. \frac{\ell^3}{3} \right|_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L} \frac{L^3}{12}$$

$$I_{G,3} = \frac{1}{12} M L^2 \quad (13.5)$$

- **Cylindre creux** : en rotation autour de l'axe de symétrie vertical Ge_3

- ① Masse : M
- ② Hauteur : L
- ③ Rayon : R
- ④ Epaisseur : e négligeable : $e \ll R$



- **Moment d'inertie** : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3

$$I_{G,3} = \int_V dm R^2 \quad (13.6)$$

- **Volume infinitésimal** : longueur L , largeur $R d\theta$ et épaisseur e

$$dV = R L e d\theta \quad (13.7)$$

- **Densité volumique** : cylindre creux homogène

$$\rho_V = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \quad (13.8)$$

- **Masse** : élément de volume infinitésimal dV

$$dm = \rho_V dV = \frac{M}{V} R L e d\theta \quad (13.9)$$

- **Moment d'inertie** : autour de l'axe Ge_3

$$I_{G,3} = \int_V dm R^2 \quad (13.6)$$

- **Moment d'inertie** : (13.9) dans (13.6)

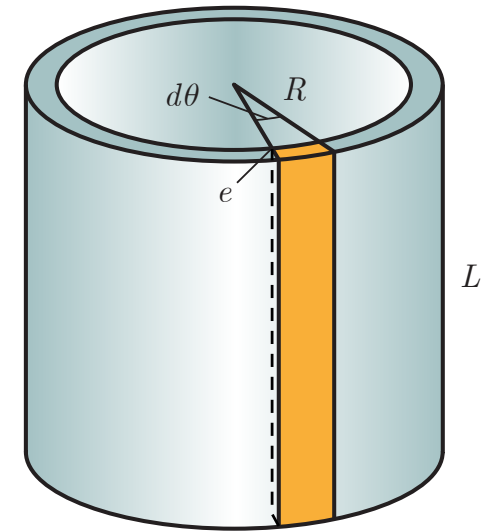
$$I_{G,3} = \frac{M}{V} R^3 L e \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \frac{M}{V} R^3 L e \quad (13.10)$$

- **Volume** : cylindre creux

$$V = 2\pi R L e \quad (13.11)$$

- **Moment d'inertie** : (13.11) dans (13.10)

$$I_{G,3} = M R^2 \quad (13.12)$$

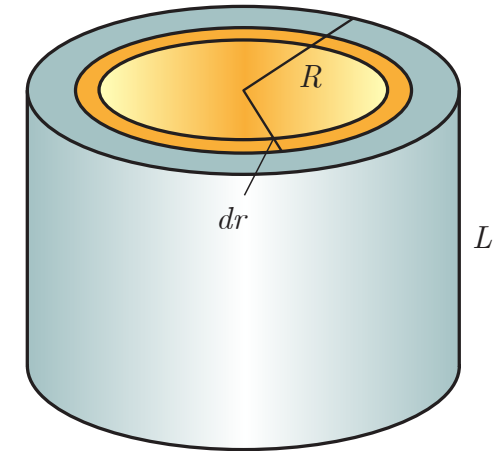


- **Cylindre plein** : en rotation autour de l'axe de symétrie vertical Ge_3

1 Masse : M

2 Hauteur : L

3 Rayon : R



- **Moment d'inertie** : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3

$$I_{G,3} = \int_V dm r^2$$

- **Volume infinitésimal** : longueur L , circonférence $2\pi r$ et épaisseur dr

$$dV = 2\pi L r dr \quad (13.13)$$

- **Densité volumique** : cylindre plein homogène

$$\rho_V = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \quad (13.8)$$

- **Masse** : élément de volume infinitésimal dV

$$dm = \rho_V dV = \frac{M}{V} 2\pi L r dr \quad (13.14)$$

- **Moment d'inertie** : autour de l'axe Ge_3

$$I_{G,3} = \int_V dm r^2$$

- **Moment d'inertie** : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3 (13.14)

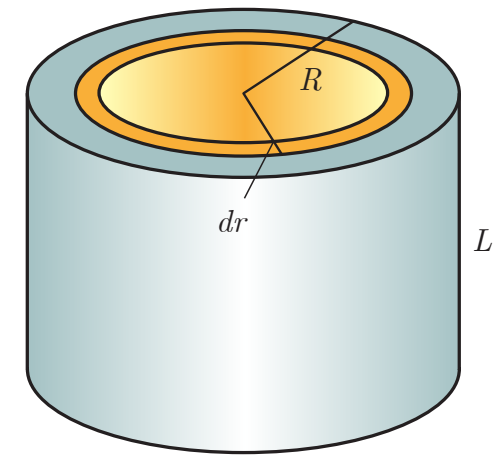
$$I_{G,3} = 2\pi \frac{M}{V} L \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{M}{V} L \left. \frac{1}{4} r^4 \right|_0^R = \frac{\pi}{2} \frac{M}{V} L R^4 \quad (13.15)$$

- **Volume** : cylindre plein

$$V = \pi R^2 L \quad (13.16)$$

- **Moment d'inertie** : (13.16) dans (13.15)

$$I_{G,3} = \frac{1}{2} M R^2 \quad (13.17)$$





- Le moment d'inertie d'un cylindre plein est la moitié du moment d'inertie d'un cylindre creux de même taille et de même masse. Sur un plan incliné, le moment de force d'entraînement du poids est le même pour les deux cylindres. Ainsi, l'accélération angulaire du cylindre plein est le double de celle du cylindre creux.
- Par conséquent, si ces deux cylindres sont lâchés en même temps de la même hauteur, le cylindre plein atteindra le bas du plan incliné avant le cylindre creux parce que l'accélération de son centre de masse sera le double de celle du cylindre creux.

13.2 Solide indéformable avec un axe fixe

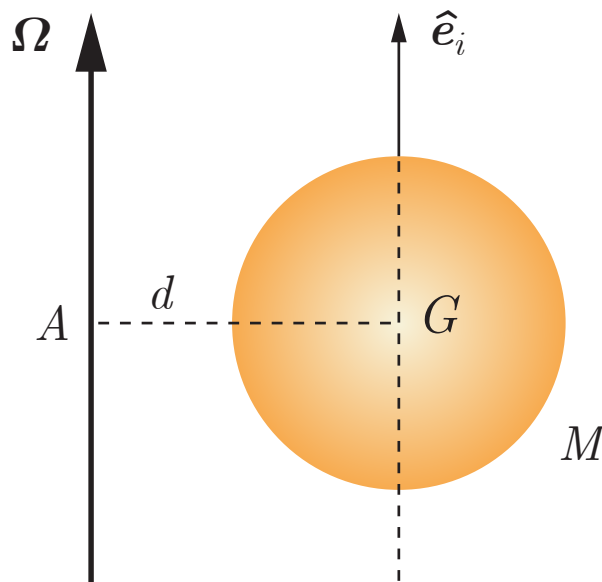
13.2.1 Théorème de Huygens-Steiner

13.2.2 Energie cinétique d'un solide indéformable

13.2.3 Théorème de l'énergie cinétique

13.2.4 Roue mal équilibrée

- **Théorème de Huygens-Steiner** : on cherche à déterminer le moment d'inertie $I_{A,i}$ d'un solide indéformable quelconque de masse M en rotation à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{e}_i$ autour d'un axe $A e_i$ qui passe par le point A et qui est parallèle à l'axe principal d'inertie $G e_i$. On désire l'exprimer en fonction du moment d'inertie $I_{G,i}$ supposé connu. Les axes $A e_i$ et $G e_i$ sont séparés d'une distance $d = \|\mathbf{AG}\|$.



Christian Huygens

1629 – 1695



Jacob Steiner

1796 – 1863



- **Théorème de transfert du moment cinétique** : (12.17) évalué en $O \equiv A$

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{AG} \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_G \quad (13.18)$$

- **Mouvement circulaire** : G autour de A

$$\mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AG} \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}_A = \mathbf{0} \quad (13.19)$$

- **Moment cinétique** : (13.19) dans (13.18)

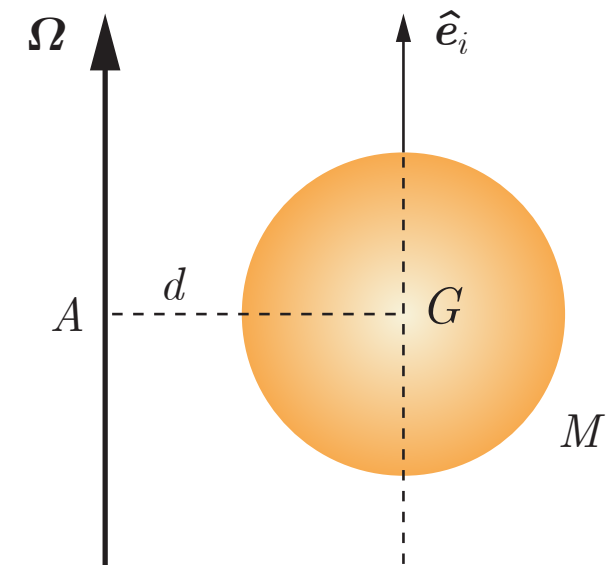
$$\mathbf{L}_A = M \mathbf{AG} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AG}) + \mathbf{L}_G \quad (13.20)$$

- **Identité vectorielle** : (1.44) dans (13.20)

$$\mathbf{L}_A = M \left(\mathbf{AG}^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{AG} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{AG} \right) + \mathbf{L}_G \quad (13.21)$$

- **Identités géométriques** :

$$\mathbf{AG} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{AG}^2 = d^2 \quad (13.22)$$



- **Moment cinétique** : évalué en A (13.21)

$$\mathbf{L}_A = M \left(\mathbf{AG}^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{AG} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{AG} \right) + \mathbf{L}_G$$

- **Identités géométriques** :

$$\mathbf{AG}^2 = d^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{AG} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (13.22)$$

- **Moment cinétique** :

$$\mathbf{L}_A = M d^2 \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{L}_G \quad (13.23)$$

- **Moments d'inertie** : moments cinétiques $\mathbf{L}_G$ et $\mathbf{L}_A$ colinéaires à $\boldsymbol{\Omega}$

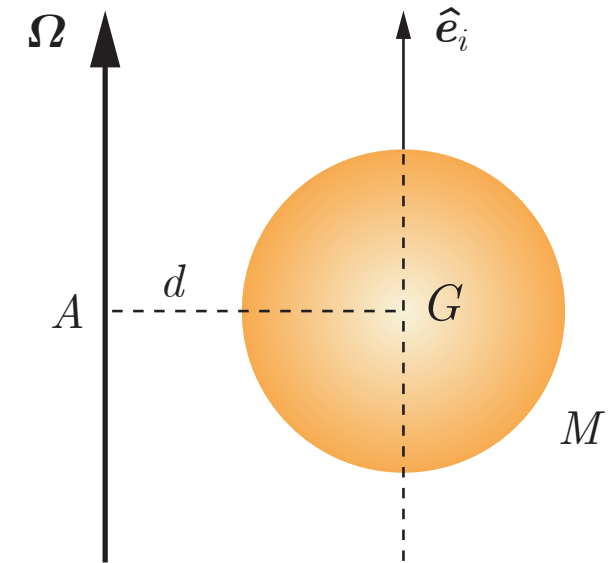
$$\mathbf{L}_G = I_{G,i} \boldsymbol{\Omega} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{L}_A = I_{A,i} \boldsymbol{\Omega} \quad (13.24)$$

- **Moment cinétique** : évalué en A

$$I_{A,i} \boldsymbol{\Omega} = (I_{G,i} + M d^2) \boldsymbol{\Omega} \quad (13.25)$$

- **Théorème de Huygens-Steiner** : formule de Steiner

$$I_{A,i} = I_{G,i} + M d^2 \quad (13.26)$$



- **Solide indéformable** : ensemble de points matériels α
- **Energie cinétique** : solide indéformable

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2 \quad (13.27)$$

- **Identités des vitesses** : vitesse $\mathbf{v}_{\alpha}$ et vitesse relative $\mathbf{v}'_{\alpha}$

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{V}_G + \mathbf{v}'_{\alpha} \quad (11.72)$$

- **Energie cinétique** : (11.72) dans (13.27)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{V}_G + \mathbf{v}'_{\alpha})^2 \quad (13.28)$$

- **Energie cinétique** : (13.28) développée

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) \mathbf{V}_G^2 + \mathbf{V}_G \cdot \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha}^2 \quad (13.28)$$

- **Energie cinétique :**

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) \mathbf{V}_G^2 + \mathbf{V}_G \cdot \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha}{}^2 \quad (13.28)$$

- **Quantité de mouvement relative :** nulle

$$\mathbf{P}' = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} = \mathbf{0} \quad (11.74)$$

- **Energie cinétique :** (11.74) dans (13.28)

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha}{}^2 \quad \text{où} \quad M = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \quad (13.29)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse G et le deuxième terme est l'énergie cinétique relative T' du mouvement de rotation propre.

- **Energie cinétique relative :** mouvement de rotation propre

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha}{}^2 \quad (13.30)$$

- **Energie cinétique relative** : mouvement de rotation propre

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha}{}^2 \quad (13.30)$$

- **Identités des vitesses** : solide indéformable

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{GP}_{\alpha} = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha} \quad (12.7)$$

- **Identités des vitesses** : (12.7) dans (11.40)

$$\mathbf{v}'_{\alpha} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha} \quad (13.31)$$

- **Vitesse relative** : (13.31) au carré

$$\mathbf{v}'_{\alpha}{}^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha}) \quad (13.32)$$

- **Identité du produit mixte** : $\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{r}'_{\alpha}$ et $\mathbf{c} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha}$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \quad (1.41)$$

- **Energie cinétique relative** : mouvement de rotation propre

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}'^2 \quad (13.30)$$

- **Identité du produit mixte** : invariance par permutation cyclique

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a \quad (1.41)$$

- **Identité du produit mixte** : $a = \Omega$, $b = r'_{\alpha}$, $c = \Omega \times r'_{\alpha}$

$$v_{\alpha}'^2 = (\Omega \times r'_{\alpha}) \cdot (\Omega \times r'_{\alpha}) = (r'_{\alpha} \times (\Omega \times r'_{\alpha})) \cdot \Omega \quad (13.32)$$

- **Energie cinétique relative** :

$$T' = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} r'_{\alpha} \times (\Omega \times r'_{\alpha}) \right) \cdot \Omega \quad (13.33)$$

- **Moment cinétique** : évalué en G (11.67) dans (12.40)

$$L_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r'_{\alpha} \times (\Omega \times r'_{\alpha}) \quad \text{où} \quad r'_{\alpha} = GP_{\alpha} \quad (13.34)$$

- **Energie cinétique relative** : (13.34) dans (13.33)

$$T' = \frac{1}{2} \mathbf{L}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.35)$$

- **Energie cinétique** : où $\mathbf{P} = M \mathbf{V}_G$

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_G^2 + T' = \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}_G + \frac{1}{2} \mathbf{L}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.36)$$

- **Moment cinétique** : repère d'inertie $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$

$$\mathbf{L}_G = \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j \hat{\mathbf{e}}_j \quad (12.51)$$

- **Vitesse angulaire** : repère d'inertie $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (12.43)$$

- **Energie cinétique relative** : où $\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \delta_{ji}$ donne (13.37)

$$T' = \frac{1}{2} \mathbf{L}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j \hat{\mathbf{e}}_j \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{\mathbf{e}}_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j^2$$

- **Vitesse** : centre de masse dans le repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$\mathbf{V}_G = \sum_{j=1}^3 V_{G,j} \hat{e}_j \quad \text{ainsi} \quad V_G^2 = \sum_{j=1}^3 V_{G,j}^2 \quad (13.38)$$

- **Energie cinétique** : axe de rotation quelconque

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 M V_{G,j}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j^2 \quad (12.39)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse G et le deuxième terme est l'énergie cinétique relative du mouvement de rotation propre pour un axe de rotation quelconque.

- **Vitesse angulaire** : orientée selon l'axe principal d'inertie $G e_i$

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{j=1}^3 \Omega_j \hat{e}_j = \Omega \hat{e}_i \quad \text{ainsi} \quad \Omega_j = \Omega \delta_{ij} \quad (12.40)$$

- **Energie cinétique** : axe de rotation fixe selon l'axe principal d'inertie $G e_i$

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,i} \Omega^2 \quad (12.41)$$

- **Dérivée temporelle** : énergie cinétique (13.39) avec (13.38)

$$\dot{T} = M \dot{\mathbf{V}}_G \cdot \mathbf{V}_G + \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \dot{\Omega}_j \Omega_j \quad (13.42)$$

- **Dérivée temporelle** : (13.42) avec $\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \delta_{ji}$

$$\dot{T} = M \dot{\mathbf{V}}_G \cdot \mathbf{V}_G + \sum_{j=1}^3 \left(I_{G,j} \dot{\Omega}_j \hat{\mathbf{e}}_j \right) \cdot \sum_{i=1}^3 (\Omega_i \hat{\mathbf{e}}_i) \quad (13.43)$$

- **Identité vectorielle** : (12.51) et (12.56) donne (13.44)

$$\left(\sum_{j=1}^3 I_{G,j} \dot{\Omega}_j \hat{\mathbf{e}}_j \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{\mathbf{e}}_i \right) = \left(\dot{\mathbf{L}}_G - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_G \right) \cdot \boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{L}}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

- **Dérivée temporelle** : énergie cinétique avec $\dot{\mathbf{P}} = M \dot{\mathbf{V}}_G$

$$\dot{T} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{V}_G + \dot{\mathbf{L}}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.45)$$

- **Dérivée temporelle** : énergie cinétique

$$\dot{T} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{V}_G + \dot{\mathbf{L}}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.45)$$

- **Théorèmes de dynamique du solide indéformable** : (12.15) et (12.32)

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{P}} \quad \text{et} \quad \sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_G$$

- **Dérivée temporelle** : énergie cinétique

$$\dot{T} = \sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{V}_G + \sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.46)$$

- ① **Premier terme** : puissance due à l'action des forces extérieures $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ sur le mouvement du centre de masse du solide indéformable caractérisé par la vitesse $\mathbf{V}_G$.
 - ② **Deuxième terme** : puissance due à l'action des moments de forces extérieures $\mathbf{M}_G^{\text{ext}}$ sur le mouvement de rotation propre du solide indéformable autour du centre de masse caractérisé par la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$.
- **Théorème du moment cinétique** : intégrale par rapport au temps de la dérivée temporelle de l'énergie cinétique T du solide indéformable.

- **Dérivée temporelle** : énergie cinétique

$$\dot{T} = \sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{V}_G + \sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.46)$$

- **Identité des vitesses** :

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{v}_\alpha - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G}P_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_\alpha \quad (13.31)$$

- **Moment de force extérieure** : $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ exercée sur P_α

$$\mathbf{M}_{G,\alpha}^{\text{ext}} = \mathbf{G}P_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = \mathbf{r}'_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \quad (13.47)$$

- **Puissance** : (13.31) et (13.47) dans (13.46)

$$\dot{T} = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot (\mathbf{v}_\alpha - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_\alpha) + \sum_\alpha (\mathbf{r}'_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}) \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.48)$$

- **Identité vectorielle** : (1.41)

$$(\mathbf{r}'_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}) \cdot \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_\alpha) \cdot \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_\alpha) \quad (13.49)$$

- **Dérivée temporelle** : énergie cinétique (13.49) dans (13.48)

$$\dot{T} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} \quad (13.50)$$

- **Variation infinitésimale** : $dT = \dot{T} dt$ avec $d\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{v}_{\alpha} dt$

$$dT = \sum_{\alpha} \delta W(\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}) = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} \quad (13.51)$$

- **Travail** : force extérieure $\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$ sur P_{α} le long du chemin $\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}$,

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}) = \int_{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}} \delta W(\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}) = \int_{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} \quad (13.52)$$

- **Variation d'énergie cinétique** : le long du chemin $\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}$

$$\Delta T_{1 \rightarrow 2} = \int_{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}} dT = \int_{T_1}^{T_2} dT = T_2 - T_1 \quad (13.53)$$

- **Théorème de l'énergie cinétique** : solide indéformable

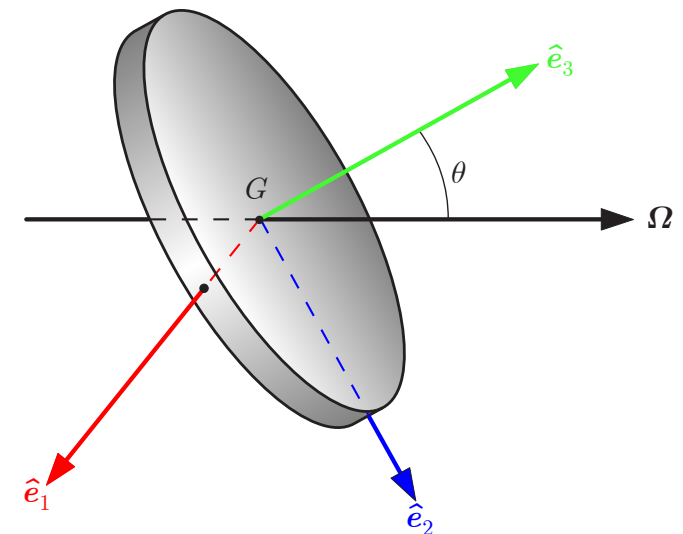
$$\Delta T_{1 \rightarrow 2} = \sum_{\alpha} W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}) = \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} \quad (13.54)$$

- **Axes principaux d'inertie** : Ge_1 , Ge_2 et Ge_3 sont immobiles par rapport au référentiel de la roue en rotation. Ils tournent avec la roue comme des rayons.
- **Vecteur vitesse angulaire** : constant selon l'axe de rotation fixe mais pas selon les axes principaux d'inertie mobiles. Initialement, à $t = 0$, l'axe Ge_1 est horizontal. L'angle θ est constant.

- ① selon $\hat{e}_1$: $\Omega_1 = \Omega \sin \theta \sin(\Omega t)$
- ② selon $\hat{e}_2$: $\Omega_2 = \Omega \sin \theta \cos(\Omega t)$
- ③ selon $\hat{e}_3$: $\Omega_3 = \Omega \cos \theta$ (13.55)

- **Dérivée temporelle** : vecteur vitesse angulaire

- ① selon $\hat{e}_1$: $\dot{\Omega}_1 = \Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t)$
- ② selon $\hat{e}_2$: $\dot{\Omega}_2 = -\Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t)$
- ③ selon $\hat{e}_3$: $\dot{\Omega}_3 = 0$ (13.56)



- **Vitesse angulaire** : repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

- ① selon $\hat{e}_1$: $\Omega_1 = \Omega \sin \theta \sin(\Omega t)$
- ② selon $\hat{e}_2$: $\Omega_2 = \Omega \sin \theta \cos(\Omega t)$
- ③ selon $\hat{e}_3$: $\Omega_3 = \Omega \cos \theta$

(13.55)

- **Accélération angulaire** : repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

- ① selon $\hat{e}_1$: $\dot{\Omega}_1 = \Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t)$
- ② selon $\hat{e}_2$: $\dot{\Omega}_2 = -\Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t)$
- ③ selon $\hat{e}_3$: $\dot{\Omega}_3 = 0$

(13.56)

- **Equations d'Euler** : générales

- ① selon $\hat{e}_1$: $\sum M_{G,1}^{\text{ext}} = I_{G,1} \dot{\Omega}_1 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_3 \Omega_2$
- ② selon $\hat{e}_2$: $\sum M_{G,2}^{\text{ext}} = I_{G,2} \dot{\Omega}_2 + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3$
- ③ selon $\hat{e}_3$: $\sum M_{G,3}^{\text{ext}} = I_{G,3} \dot{\Omega}_3 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_2 \Omega_1$

(12.60)

- **Moments d'inertie** : roue (cylindre)

$$I_{G,3} = I_{G,\parallel} \quad \text{et} \quad I_{G,1} = I_{G,2} = I_{G,\perp} \quad (13.57)$$

- **Equations d'Euler : roue mal équilibrée (13.58)**

$$\textcircled{1} \quad \text{selon } \hat{e}_1 : \sum M_{G,1}^{\text{ext}} = I_{G,\perp} \Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t) + (I_{G,\parallel} - I_{G,\perp}) \Omega^2 \cos \theta \sin \theta \cos(\Omega t)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{selon } \hat{e}_2 : \sum M_{G,2}^{\text{ext}} = -I_{G,\perp} \Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t) + (I_{G,\perp} - I_{G,\parallel}) \Omega^2 \cos \theta \sin \theta \sin(\Omega t)$$

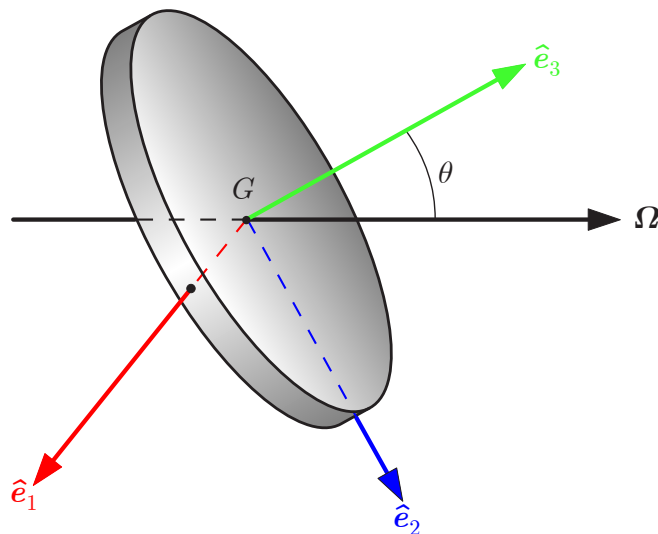
$$\textcircled{3} \quad \text{selon } \hat{e}_3 : \sum M_{G,3}^{\text{ext}} = 0$$

- **Somme des moments de forces extérieures : sur la roue (13.59)**

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = & \left(I_{G,\perp} + (I_{G,\parallel} - I_{G,\perp}) \cos \theta \right) \Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t) \hat{e}_1 \\ & - \left(I_{G,\perp} + (I_{G,\parallel} - I_{G,\perp}) \cos \theta \right) \Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t) \hat{e}_2 \end{aligned}$$

La somme des moments de forces extérieures $\mathbf{M}_G^{\text{ext}}$ exercés sur la roue est périodique ce qui génère des secousses (roue mal équilibrée). Pour une roue bien équilibrée, le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ est orienté selon l'axe de symétrie Ge_3 de la roue, i.e. $\theta = 0$, et ainsi $\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \mathbf{0}$.

- **Moment de force extérieure** : la somme des moments de forces extérieures M_G^{ext} exercés sur la roue est périodique ce qui génère des secousses (roue mal équilibrée). Pour une roue bien équilibrée, le vecteur vitesse angulaire Ω est orienté selon l'axe de symétrie Ge_3 de la roue, i.e. $\theta = 0$, et ainsi $\sum M_G^{\text{ext}} = 0$.
- **Équilibrage de roue** : l'équilibrage d'une roue de voiture se fait en mesurant la somme des moments de force $-\sum M_G^{\text{ext}}$ exercés par la roue en rotation sur l'axe. En ajoutant des masses au bon endroit sur la jante, on annule ce moment de force extérieure résultant.



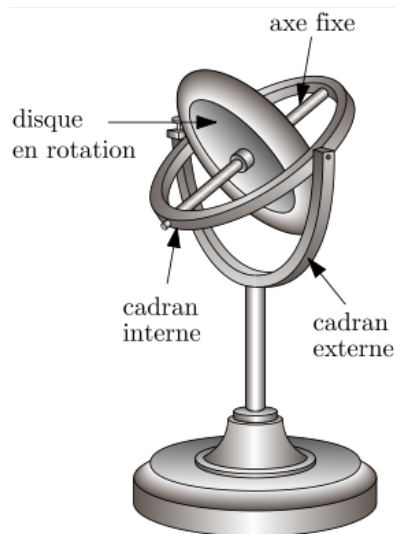
13.3 Gyroscope et effets gyroscopiques

13.3.1 Effets gyroscopiques

13.3.2 Roue de vélo

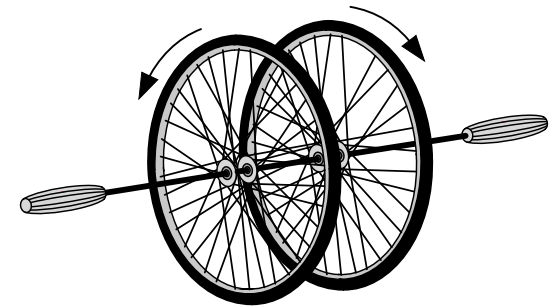
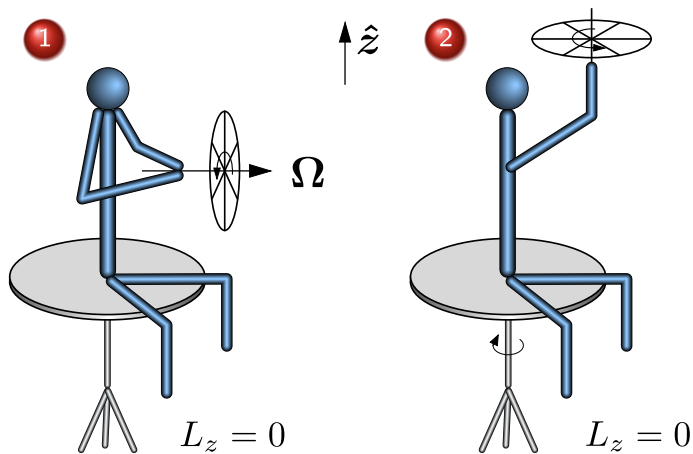
13.3.3 Toupie

- **Gyroscopie** : roue ou disque en rotation dont l'axe de rotation se maintient dans une orientation donnée par rapport à un référentiel d'inertie. Lorsque la roue est en rotation, l'orientation de l'axe n'est pas modifiée par la rotation des cadrans interne ou externe.

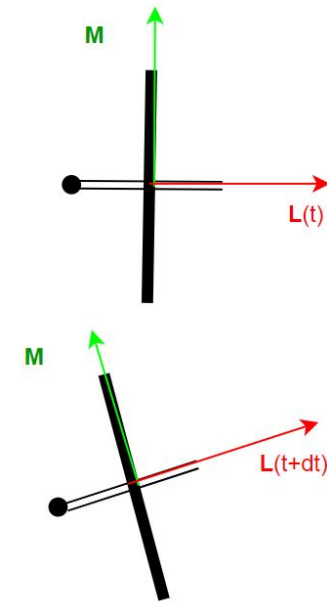
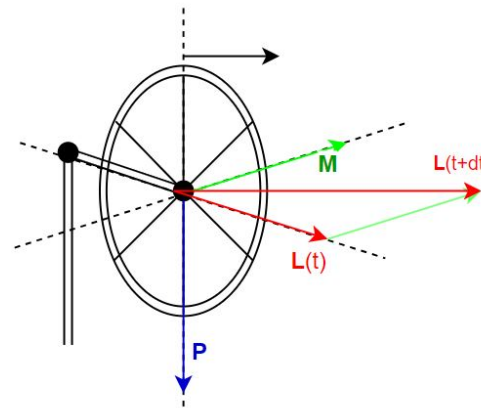


- **Histoire** : le gyroscope a été inventé en 1852 par Léon Foucault comme alternative au pendule de Foucault pour démontrer la rotation de la terre ; “gyroscope” = “qui permet de voir tourner” la terre.
- **Aéronautique** : les gyroscopes sont abondamment utilisés en aéronautique pour s'orienter selon un axe fixe.

- **Effets gyroscopiques** : par analogie avec le gyroscope, on parle d'effets gyroscopiques pour désigner le comportement dynamique d'un disque ou d'une roue dont la rotation autour d'un axe a pour effet de résister aux changements de son orientation. Ces effets sont liés à la conservation du moment cinétique.



- **Conservation du moment cinétique** : composante verticale : $L_z = 0$
 - ① **Etat initial** : la roue tourne dans un plan vertical selon un axe horizontal.
 - ② **Etat final** : la roue tourne dans le sens trigonométrique selon l'axe vertical et l'étudiant avec le tabouret tournent dans le sens opposé. Leurs moments cinétiques se compensent.



- Une roue de vélo dont l'axe de rotation est fixé à une extrémité O d'une tige verticale fixe est mise en mouvement de rotation propre dans un plan vertical qui génère un moment cinétique horizontal $\mathbf{L}_O$. Le poids $\mathbf{P} = M \mathbf{g}$ de la roue génère un moment de force extérieure horizontal unique $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$.
- D'après le théorème du moment cinétique, le moment cinétique $\mathbf{L}_O$ se met à tourner dans le plan horizontal,

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{R}_G \times \mathbf{P} = \dot{\mathbf{L}}_O = \frac{\mathbf{L}_O(t + dt) - \mathbf{L}_O(t)}{dt}$$

Ainsi, la roue de vélo est en précession autour de la tige verticale fixe.

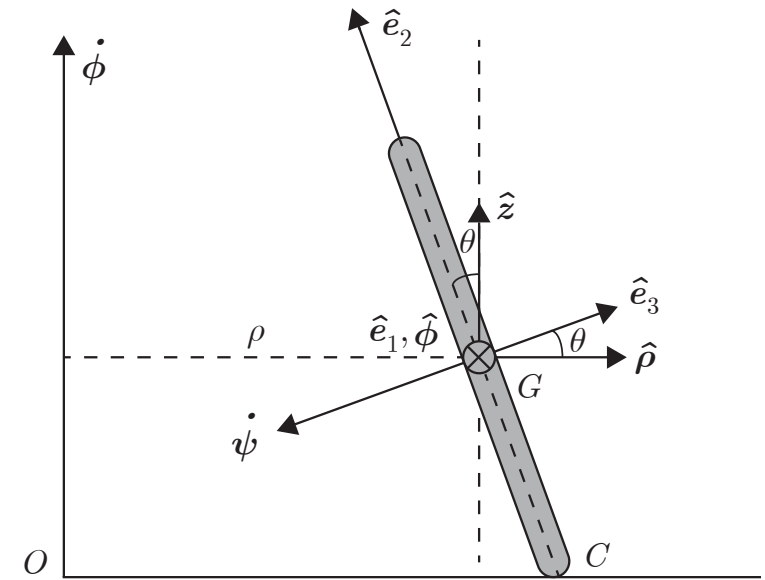


- Une roue de vélo dont l'axe de rotation est fixé à l'extrémité O d'un fil est mise en mouvement de rotation propre dans un plan vertical qui génère un moment cinétique horizontal $\mathbf{L}_O$. Le poids $\mathbf{P} = M \mathbf{g}$ de la roue génère un moment de force extérieure horizontal unique $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$.
- D'après le théorème du moment cinétique, le moment cinétique $\mathbf{L}_O$ se met à tourner dans le plan horizontal,

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{R}_G \times \mathbf{P} = \dot{\mathbf{L}}_O = \frac{\mathbf{L}_O(t + dt) - \mathbf{L}_O(t)}{dt}$$

Ainsi, la roue de vélo est en précession autour du fil.

- **Roue de vélo** : masse M , rayon R qui roule sans glisser. Son centre de masse G est en mouvement circulaire uniforme de rayon $\rho = \text{cste}$ à vitesse angulaire $\dot{\phi} = \dot{\phi} \hat{z} = \text{cste}$ où le vecteur unitaire $\hat{z} = \cos \theta \hat{e}_2 + \sin \theta \hat{e}_3$.



- **Objectif** : on cherche à déterminer l'angle d'inclinaison $\theta = \text{cste}$ du plan de la roue.

- **Repère d'inertie** : $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ où $\hat{e}_1$ est horizontal en tout temps

1 Cinématique :

- **Vitesse angulaire** : précession $\dot{\phi}$ et rotation propre $\dot{\psi}$

$$\Omega = \dot{\phi} + \dot{\psi} = \dot{\phi} \hat{z} - \dot{\psi} \hat{e}_3 = \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_2 + (\dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi}) \hat{e}_3 \quad (13.60)$$

- **Vitesse du centre de masse** : MCU de rayon ρ et de vitesse angulaire $\dot{\phi}$

$$V_G = V_G \hat{\phi} = \rho \dot{\phi} \hat{\phi} = \rho \dot{\phi} \hat{e}_1 \quad (13.61)$$

- **Vitesse angulaire :** (13.60)

$$\Omega = \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_2 + \left(\dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi} \right) \hat{e}_3$$

- **Vitesse du centre de masse :** MCU

$$V_G = \rho \dot{\phi} \hat{e}_1 \quad (13.61)$$

- **Roulement sans glissement :** $V_C = 0$

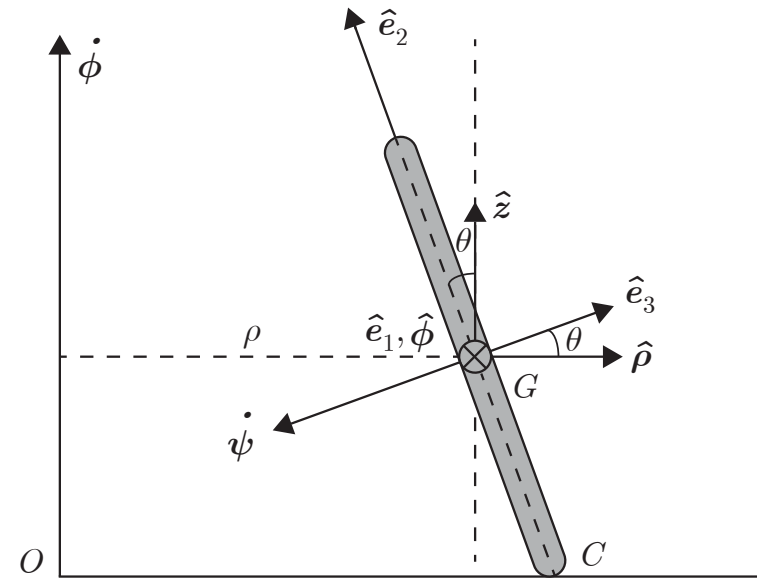
$$\begin{aligned} V_G = \Omega \times CG &= \left(\cancel{\dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_2} + \left(\dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi} \right) \hat{e}_3 \right) \times R \hat{e}_2 \\ &= -R \left(\dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi} \right) \hat{e}_1 \end{aligned} \quad (13.62)$$

- **Condition de liaison :** précession et rotation propre (13.61) = (13.62)

$$\dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi} = -\frac{\rho}{R} \dot{\phi} \quad (13.63)$$

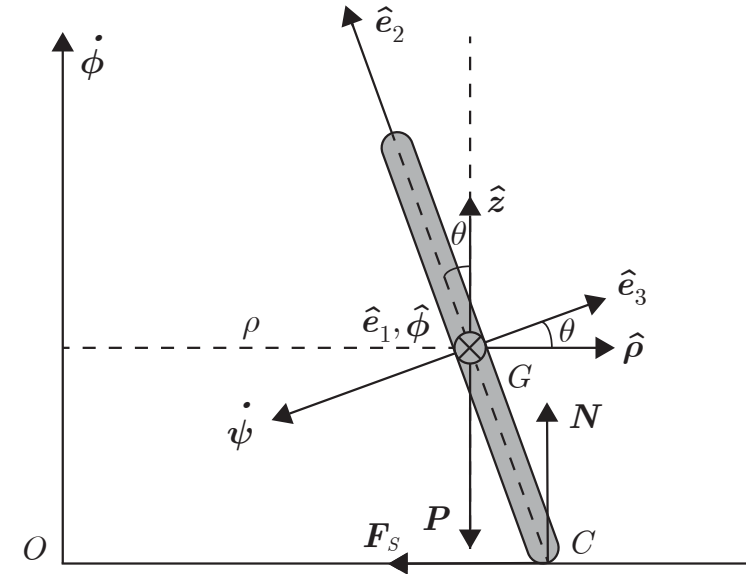
- **Vitesse angulaire :** (13.63) dans (13.60)

$$\Omega = \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_2 - \frac{\rho}{R} \dot{\phi} \hat{e}_3 \quad (13.64)$$



2 Dynamique :

- **Théorème du moment cinétique** : on évalue le théorème du moment cinétique au point de contact C entre la roue et le sol, comme cela les moments de force dus à la force de réaction normale N et à la force de frottement statique F_S sont nuls. Le seul moment de force non-nul M_C^{ext} est dû au poids $P = M g$.



- **Théorème du moment cinétique** : évalué en C

$$\sum M_C^{\text{ext}} = \dot{L}_C \quad (12.31)$$

- **Moment de force extérieure** : dû au poids évalué en C

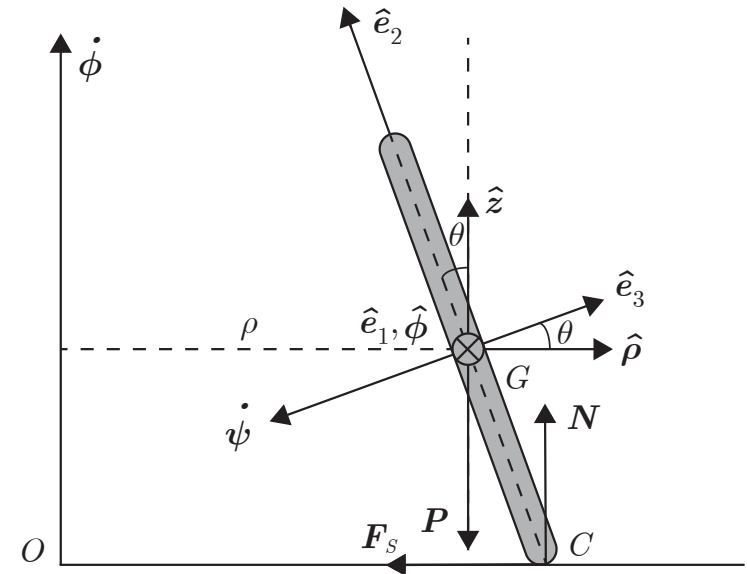
$$\begin{aligned} M_C^{\text{ext}} &= \mathbf{CG} \times \mathbf{P} = R \hat{\mathbf{e}}_2 \times (-Mg \hat{\mathbf{z}}) = -MRg \hat{\mathbf{e}}_2 \times (\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2 + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= -MRg \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 = -MRg \sin \theta \hat{\phi} \end{aligned} \quad (13.65)$$

- **Vitesse angulaire :** $\Omega = \Omega_2 \hat{e}_2 + \Omega_3 \hat{e}_3$

$$\Omega = \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_2 - \frac{\rho}{R} \dot{\phi} \hat{e}_3 \quad (13.64)$$

- **Moment cinétique :** évalué en C

$$\begin{aligned} L_C &= I_{C,2} \Omega_2 \hat{e}_2 + I_{C,3} \Omega_3 \hat{e}_3 \quad (13.66) \\ &= I_{C,2} \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_2 - I_{C,3} \frac{\rho}{R} \dot{\phi} \hat{e}_3 \end{aligned}$$



- **Changement de base :** rotation d'un angle θ dans le plan vertical

$$\hat{e}_2 = -\sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\hat{e}_3 = \cos \theta \hat{\rho} + \sin \theta \hat{z} \quad (13.67)$$

- **Moment cinétique :** évalué en C (13.67) dans (13.66) donne (13.68)

$$L_C = I_{C,2} \dot{\phi} \cos \theta (-\sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{z}) - I_{C,3} \frac{\rho}{R} \dot{\phi} (\cos \theta \hat{\rho} + \sin \theta \hat{z})$$

- **Moment cinétique** : évalué en C (13.68)

$$\mathbf{L}_C = - \left(I_{C,2} \sin \theta + I_{C,3} \frac{\rho}{R} \right) \dot{\phi} \cos \theta \hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(I_{C,2} \cos^2 \theta - I_{C,3} \frac{\rho}{R} \sin \theta \right) \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}}$$

- **Dérivée temporelle** : moment cinétique où $\rho = \text{cste}$, $\theta = \text{cste}$, $\dot{\phi} = \text{cste}$

$$\dot{\mathbf{L}}_C = - \left(I_{C,2} \sin \theta + I_{C,3} \frac{\rho}{R} \right) \dot{\phi} \cos \theta \dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} \quad (13.69)$$

- **Formule de Poisson** : précession de $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ avec $\dot{\boldsymbol{\phi}} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}}$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} = \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (5.6)$$

- **Dérivée temporelle** : moment cinétique (5.6) dans (13.64)

$$\dot{\mathbf{L}}_C = - \left(I_{C,3} + \frac{R}{\rho} I_{C,2} \sin \theta \right) \frac{\rho}{R} \dot{\phi}^2 \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (13.70)$$

- **Théorème de Huygens-Steiner** : cylindre : plein $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ creux

$$I_{C,2} = I_{G,2} = \frac{\lambda}{2} M R^2 \quad (\text{même axe})$$

$$I_{C,3} = I_{G,3} + M R^2 = \lambda M R^2 + M R^2 = (\lambda + 1) M R^2 \quad (13.71)$$

- **Dérivée temporelle** : moment cinétique (13.71) dans (13.70)

$$\dot{L}_C = - \left((\lambda + 1) + \frac{\lambda}{2} \frac{R}{\rho} \sin \theta \right) M R \rho \dot{\phi}^2 \cos \theta \hat{\phi} \quad (13.72)$$

- **Approximation** : $R \ll \rho$ ainsi $R/\rho \ll 1$

$$\dot{L}_C = - (\lambda + 1) M R \rho \dot{\phi}^2 \cos \theta \hat{\phi} \quad (13.73)$$

- **Moment de force extérieure unique** : dû au poids évalué en C

$$M_C^{\text{ext}} = - M R g \sin \theta \hat{\phi} \quad (13.65)$$

- **Théorème du moment cinétique** : évalué en C (12.31)

$$M_C^{\text{ext}} = \dot{L}_C \quad (13.74)$$

- **Théorème du moment cinétique** : (13.73) et (13.65) dans (13.74)

$$(\lambda + 1) \rho \dot{\phi}^2 \cos \theta = g \sin \theta \quad (13.75)$$

- **Tangente de l'angle d'inclinaison** : centre de masse G - MCU

$$\tan \theta = (\lambda + 1) \frac{\rho \dot{\phi}^2}{g} = (\lambda + 1) \frac{V_G^2}{\rho g} = (\lambda + 1) \frac{\| \mathbf{A}_G \|}{g} \quad (13.76)$$

où $\tan \theta$ est une fonction monotone croissante de θ .

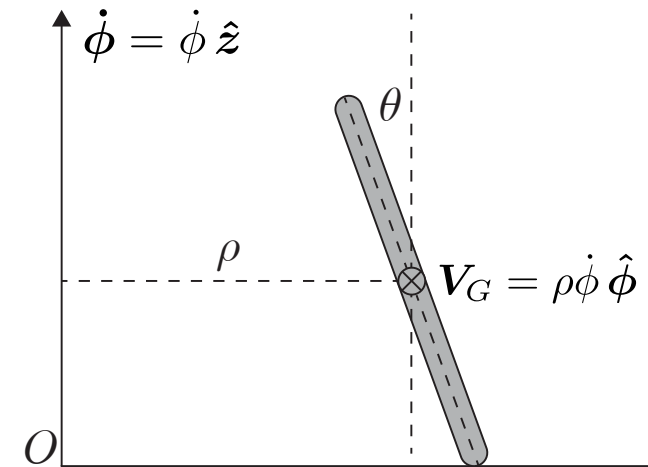
- **Angle d'inclinaison** :

$$\theta = \arctan \left((\lambda + 1) \frac{V_G^2}{\rho g} \right) \quad (13.77)$$

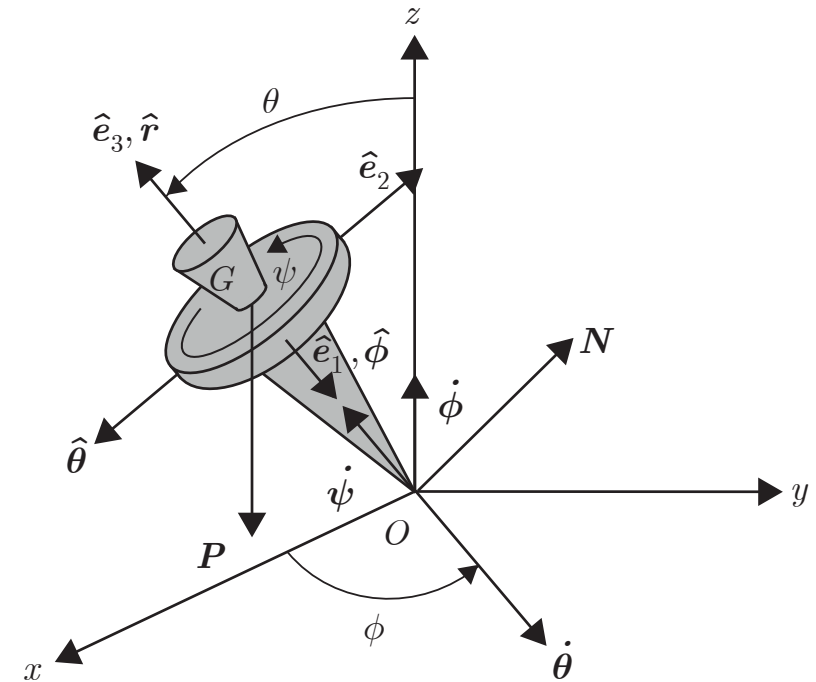
- **Moto** : angle d'inclinaison θ dans un virage

- 1 **Vitesse constante** $V_G = \text{cste}$: si le rayon ρ diminue, l'angle d'inclinaison θ augmente et vice versa.

- 2 **Rayon constant** $\rho = \text{cste}$: si la vitesse du centre de masse V_G augmente, l'angle d'inclinaison θ augmente et vice versa.



- **Toupie** : de masse M dont la pointe située en O est fixe. Soit $\ell = \|\mathbf{OG}\|$ la distance entre la pointe O et le centre de masse G .
- **Objectif** : on cherche à déterminer la dynamique en rotation de la toupie autour de O .
- **Repère d'inertie** : $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ où $\hat{e}_1$ est horizontal en tout temps.



1 Cinématique :

- **Vitesse angulaire** : précession $\dot{\phi}$, nutation $\dot{\theta}$ et rotation propre $\dot{\psi}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{\psi} \hat{\mathbf{e}}_3 = \dot{\phi} (\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3) + \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{\psi} \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &= \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_3\end{aligned}\quad (13.78)$$

2 Dynamique :

• Théorème du moment cinétique :

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_O \quad (13.79)$$

Le seul moment de force non-nul $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ est dû au poids $\mathbf{P} = M \mathbf{g}$.

• Moment de force extérieure : poids

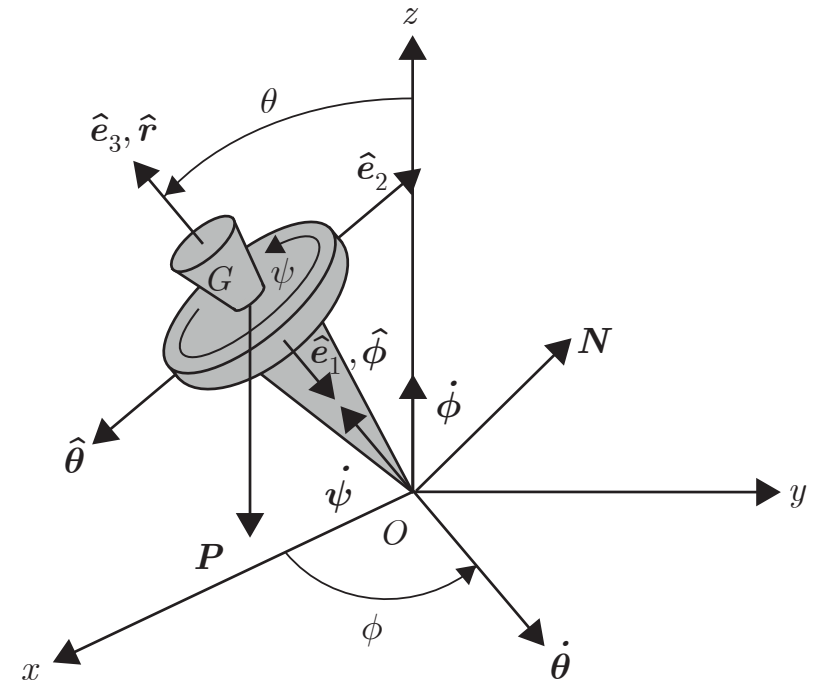
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^{\text{ext}} &= \mathbf{OG} \times \mathbf{P} = (\ell \hat{\mathbf{e}}_3) \times (-Mg \hat{\mathbf{z}}) \\ &= -Mg \ell \hat{\mathbf{e}}_3 \times (\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3) = Mg \ell \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 \end{aligned} \quad (13.80)$$

• Moment d'inertie :

$$I_{O,1} = I_{O,2} \equiv I_{O,\perp} \quad \text{et} \quad I_{O,3} \equiv I_{O,\parallel} \quad (13.81)$$

• Moment cinétique :

$$\mathbf{L}_O = I_{O,1} \Omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{O,2} \Omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{O,3} \Omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (13.82)$$



- **Vitesse angulaire :** (13.78)

$$\Omega = \dot{\theta} \hat{e}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{e}_3$$

- **Moment cinétique :**

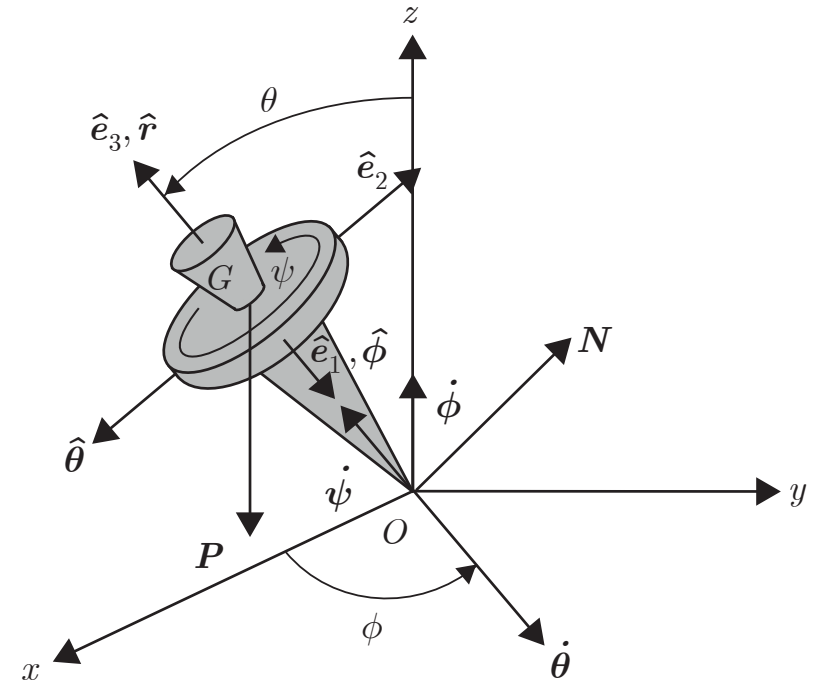
$$L_O = I_{O,1} \dot{\theta} \hat{e}_1 + I_{O,2} \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_2 + I_{O,3} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{e}_3 \quad (13.83)$$

- **Moment cinétique :**

$$L_O = I_{O,\perp} \dot{\theta} \hat{\phi} - I_{O,\perp} \dot{\phi} \sin \theta \hat{\theta} + I_{O,\parallel} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{r} \quad (13.84)$$

- **Dérivée temporelle :** moment cinétique où $I_{O,\parallel} = \text{cste}$ et $I_{O,\perp} = \text{cste}$

$$\begin{aligned} \dot{L}_O = & I_{O,\perp} \ddot{\theta} \hat{\phi} - I_{O,\perp} (\ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\theta} \\ & + I_{O,\parallel} (\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta) \hat{r} \\ & + I_{O,\perp} \dot{\theta} \dot{\hat{\phi}} - I_{O,\perp} \dot{\phi} \sin \theta \dot{\hat{\theta}} + I_{O,\parallel} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\hat{r}} \end{aligned} \quad (13.85)$$



- **Dérivée temporelle** : moment cinétique

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}}_O = & I_{O,\perp} \ddot{\theta} \hat{\phi} - I_{O,\perp} \left(\ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \right) \hat{\theta} \\ & + I_{O,\parallel} \left(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \right) \hat{\mathbf{r}} \\ & + I_{O,\perp} \dot{\theta} \dot{\hat{\phi}} - I_{O,\perp} \dot{\phi} \sin \theta \dot{\hat{\theta}} + I_{O,\parallel} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \dot{\hat{\mathbf{r}}}\end{aligned}\quad (13.85)$$

- **Formules de Poisson** : repère sphérique (5.16)

$$\textcircled{1} \quad \dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi}$$

$$\textcircled{2} \quad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{r}} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{\phi}$$

$$\textcircled{3} \quad \dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi} \left(\sin \theta \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \hat{\theta} \right)$$

- **Dérivée temporelle** : moment cinétique

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}}_O = & I_{O,\parallel} \left(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \right) \hat{\mathbf{r}} \\ & + I_{O,\parallel} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \dot{\theta} \hat{\theta} - I_{O,\perp} \left(\ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \right) \hat{\theta} \\ & + I_{O,\perp} \ddot{\theta} \hat{\phi} + (I_{O,\parallel} - I_{O,\perp}) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\phi} + I_{O,\parallel} \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi}\end{aligned}\quad (13.86)$$

- **Théorème du moment cinétique :**

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_O \quad (13.79)$$

- **Moment de force extérieure :** poids où $\hat{\phi} = \hat{e}_1$

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = Mg \ell \sin \theta \hat{\phi} \quad (13.80)$$

- **Dérivée temporelle :** moment cinétique

$$\dot{\mathbf{L}}_O = I_{O,\parallel} \left(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \right) \hat{r} \quad (13.86)$$

$$+ I_{O,\parallel} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \dot{\theta} \hat{\theta} - I_{O,\perp} \left(\ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \right) \hat{\theta} \\ + I_{O,\perp} \ddot{\theta} \hat{\phi} + (I_{O,\parallel} - I_{O,\perp}) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\phi} + I_{O,\parallel} \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi}$$

- **Equations d'Euler :** (13.80) et (13.86) dans (13.79) donne (13.87)

$$\textcircled{1} \text{ selon } \hat{r} : I_{O,\parallel} \left(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \right) = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ selon } \hat{\theta} : I_{O,\parallel} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \dot{\theta} - I_{O,\perp} \left(\ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \right) = 0$$

$$\textcircled{3} \text{ selon } \hat{\phi} : I_{O,\perp} \ddot{\theta} + (I_{O,\parallel} - I_{O,\perp}) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_{O,\parallel} \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \\ = Mg \ell \sin \theta$$

- **Equations d'Euler :** (13.87)

- 1 selon $\hat{r}$: $I_{O,\parallel} \left(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \right) = 0$

- 2 selon $\hat{\theta}$: $I_{O,\parallel} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \dot{\theta} - I_{O,\perp} \left(\ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \right) = 0$

- 3 selon $\hat{\phi}$: $I_{O,\perp} \ddot{\theta} + (I_{O,\parallel} - I_{O,\perp}) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_{O,\parallel} \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta = Mg \ell \sin \theta$

- 3 **Nutation négligeable :** cas particulier

$$\theta = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad \dot{\theta} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} = 0 \quad (13.88)$$

- **Equations d'Euler :** (13.88) dans (13.87) donne (13.89)

- 1 selon $\hat{r}$: $I_{O,\parallel} \left(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta \right) = 0$

- 2 selon $\hat{\theta}$: $I_{O,\perp} \ddot{\phi} \sin \theta = 0$

- 3 selon $\hat{\phi}$: $(I_{O,\parallel} - I_{O,\perp}) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_{O,\parallel} \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta = Mg \ell \sin \theta$

3 Nutation négligeable : cas particulier

$$\theta = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad \dot{\theta} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} = 0 \quad (13.88)$$

• Précession et rotation propre : constante (13.89) selon $\hat{r}$ et $\hat{\theta}$

$$\ddot{\phi} = \ddot{\psi} = 0 \quad \text{ainsi} \quad \dot{\phi} = \text{cste} \quad \text{et} \quad \dot{\psi} = \text{cste} \quad (13.90)$$

• Précession lente : par rapport à la rotation propre : approximation

$$\dot{\phi} \ll \dot{\psi} \quad \text{ainsi} \quad \dot{\phi}^2 \ll \dot{\psi} \dot{\phi} \quad \text{et} \quad I_{O,\parallel} \dot{\psi} \dot{\phi} = Mg\ell \quad (13.91)$$

• Vitesses angulaires : (13.91) selon $\hat{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{Mg\ell}{I_{O,\parallel} \dot{\psi}} \quad (13.92)$$

La vitesse angulaire de précession $\dot{\phi}$ est inversement proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation propre $\dot{\psi}$.



- Un anagyre est un ellipsoïde coupé selon un plan qui ne contient pas deux axes de symétrie.
- ❶ Si la précession (lacet) a lieu dans le bon sens, l'axe de rotation est un axe principal d'inertie.
- ❷ Si la précession a lieu dans le mauvais sens, l'axe de rotation n'est pas un axe principal d'inertie ce qui donne lieu à un couplage dynamique avec la nutation (tangage) et la rotation propre (roulis) généré par le moment de forces extérieures résultant (analogue à la roue mal équilibrée). Le couplage augmente au cours du temps et finit par arrêter le mouvement de précession de l'anagyre et à le relancer dans le sens opposé ...